

THERMODYNAMIQUE DES ZONES CAPILLAIRES

P. SEPPECHER

*Laboratoire de Modélisation en Mécanique, UA-229,
Université de Paris VI, T-66, 4, place Jussieu,
F-75230 Paris Cedex 05, France*

Résumé - Nous considérons les interfaces comme des zones tridimensionnelles de faible épaisseur. Nous étudions le processus asymptotique qui permet de les assimiler à des surfaces porteuses de propriétés matérielles. Nous cherchons sous quelles hypothèses les lois vérifiées par ces surfaces sont les mêmes que celles obtenues par application des principes thermodynamiques à des milieux bidimensionnels. Nous montrons en particulier qu'il est difficile d'attacher une masse aux interfaces et que leur vitesse tangentielle doit avoir une définition purement thermodynamique.

Abstract - The interfaces are seen as thin three-dimensional layers. By an asymptotic process they may be considered as carrier surfaces of material quantities. Do these surfaces verify the same laws than those given by a direct application of the principles of thermodynamic to bidimensional materials ? Specially we show the difficulty to construct a model for an interface with mass density. We show that the definition for the tangential velocity of the interface must be purely thermodynamical.

1 - INTRODUCTION

Au premier abord, les interfaces apparaissent comme des surfaces de discontinuité - discontinuité de densité ou d'autres propriétés du milieu fluide. Les expériences les plus simples montrent cependant qu'une telle modélisation est insuffisante et qu'il est nécessaire de doter l'interface d'une densité superficielle d'énergie pour comprendre la présence de tension superficielle. Pour comprendre des phénomènes plus complexes, il faut imaginer de nouvelles propriétés. C'est ainsi que, pour expliquer l'écart entre les prédictions théoriques et les mesures des vitesses de chute d'une goutte plongée dans un fluide au repos, Boussinesq /1/ introduit des viscosités de surface, que Levich /2/ introduit des concentrations et des diffusions de surfactants à l'interface. Cox /3/ introduit des glissements relatifs des milieux de part et d'autre d'une interface au voisinage d'une ligne de contact pour expliquer que le mouvement de cette ligne ne provoque pas une dissipation infinie. Bien d'autres propriétés peuvent être envisagées. C'est pourquoi les théoriciens cherchent à donner un cadre dans lequel la forme des équations d'interface doit être recherchée. Ils cherchent en particulier à exprimer les contraintes imposées par les principes de la mécanique et de la thermodynamique.

La méthode la plus classique est de considérer l'interface comme un véritable milieu bidimensionnel. On parlera alors d'interface singulière. Ce milieu possède une densité surfacique d'énergie, éventuellement des densités de masse, d'entropie, des flux surfaciques de masse, d'énergie, d'entropie, ... et peut avoir des échanges avec les fluides présents de part et d'autre de l'interface. De nombreux auteurs /4/, /5/, /6/, /7/ ont

appliqué à un tel système, où voisinent densités surfaciques et densités volumiques, les principes de conservation de la masse, du torseur cinétique ainsi que les deux principes de la thermodynamique.

Une méthode plus réaliste, semble être de considérer que les propriétés du milieu fluide ne subissent pas de discontinuité mais varient continuellement et très rapidement à la traversée de l'interface. On parlera alors d'interface épaisse. Celle-ci est une zone tridimensionnelle de faible épaisseur qui n'apparaît comme une surface que macroscopiquement, c'est-à-dire au cours d'un processus asymptotique. Au cours de ce processus sont définies des quantités interfaciales analogues à celles définies sur les interfaces singulières. On peut alors se demander si les lois que vérifient ces paramètres sont équivalentes à celles obtenues par application des principes thermodynamiques aux interfaces singulières. En d'autres termes le processus asymptotique et l'application des principes thermodynamiques commutent-ils ?

L'étude de ce processus asymptotique n'est pas nouvelle. Gibbs /8/ a introduit les quantités en excès pour ramener sur une unique surface les conditions aux limites écrites de part et d'autre d'une interface épaisse. D'autres auteurs, plus récemment, ont montré comment, par intégration, des équations de bilan locales valables à l'intérieur de la zone capillaire, pouvaient se transformer en des équations écrites sur une surface géométrique /9/, /10/. Les équations obtenues sont de la même forme que celles obtenues par application des principes de conservation à une interface singulière.

Dans cette étude, nous reprenons cette méthode en utilisant, à l'intérieur de la zone capillaire, des équations qui permettent de comprendre la présence de tension superficielle : celles des mélanges de fluides doués de capillarité interne /11/. L'utilisation de ces équations rend plus délicate la technique d'intégration. Nous montrons qu'il est nécessaire de négliger la densité de masse totale de l'interface et qu'alors le choix d'une vitesse tangentielle adéquate pour l'interface rend valable la relation, habituellement postulée, liant le flux interfacial d'entropie au flux interfacial de chaleur. Ainsi, pour obtenir une description thermodynamique complète de l'interface, une seule hypothèse est nécessaire : celle d'une équation de Gibbs interfaciale dont la validité ne peut être qu'approximative au voisinage de l'équilibre.

2 - MELANGES DE FLUIDES DOUES DE CAPILLARITE INTERNE

Les équations des fluides newtoniens ou des mélanges de ces fluides utilisées à l'intérieur de la zone capillaire ne peuvent pas conduire à un modèle satisfaisant : à l'équilibre le tenseur des contraintes est toujours sphérique, la présence de tension superficielle n'est pas explicable. Il faut construire un modèle de mélange (car en général plusieurs constituants sont en présence au voisinage d'une interface) dont l'énergie augmente à l'approche des changements de densités. Il est donc naturel de supposer que l'énergie interne du milieu est fonction de son entropie, des densités des divers constituants, mais aussi des gradients de ces densités. L'étude d'un tel milieu s'est longtemps heurtée à une importante difficulté : une apparente incompatibilité avec le second principe de la thermodynamique. En fait nous avons montré /12/ qu'il y avait seulement incompatibilité avec la description classique des contraintes internes. En effet la théorie classique suppose que les efforts exercés par une particule élémentaire sur une particule voisine sont des forces de contact exercées sur la frontière de la particule. Cette hypothèse est incompatible avec une énergie dépendant des gradients de densité. L'utilisation du principe des puissances virtuelles dans le cadre de la théorie du second gradient /13/ est nécessaire.

Nous résumons ici les équations obtenues /12/, /14/ qui ne diffèrent des équations classiques des mélanges que par la présence d'une partie non sphérique dans le tenseur des contraintes non dissipatives et d'un flux supplémentaire d'énergie dans l'équation de l'énergie.

Le mélange est constitué de n constituants i de densités ρ^i , de vitesses v^i . On note ρ sa densité totale, v sa vitesse barycentrique. Les équations locales de conservation des masses s'écrivent :

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \rho^i + \rho^i \nabla \cdot v + \nabla \cdot J^i = 0 \quad \text{pour tout } i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\text{avec } \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla \quad \text{et } J^i = \rho^i (v^i - v)$$

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \rho + \rho \nabla \cdot v = 0$$

Notons \mathbb{T} le tenseur des contraintes, f^{ext} les forces extérieures. L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$(3) \quad \frac{d}{dt} (\rho v) + \rho v \nabla \cdot v - \nabla \cdot \mathbb{T} = f^{ext}, \quad \mathbb{T} \text{ est symétrique}$$

L'hypothèse que l'énergie interne u , dépend de l'entropie s , des densités ρ^i et de leurs gradients $\nabla \rho^i$ modifie la relation de Gibbs :

$$(4) \quad du = T ds + \sum_{i=1}^n \mu^i d\rho^i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda^{ij} \nabla \rho^j \cdot d(\nabla \rho^i)$$

Dans cette relation T est la température absolue du milieu, μ^i le potentiel chimique du constituant i , les coefficients λ^{ij} sont appelés coefficients de cocapillarité des constituants i et j .

$$\text{En notant} \quad \tilde{\mu}^i = \mu^i - \sum_{j=1}^n \nabla \cdot (\lambda^{ij} \nabla \rho^j)$$

$$p = Ts - u + \sum_{i=1}^n \tilde{\mu}^i \rho^i$$

$$\mathbb{T}^N = -p \mathbb{1} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda^{ij} \nabla \rho^i \otimes \nabla \rho^j$$

$$\mathbb{T}^D = \mathbb{T} - \mathbb{T}^N$$

Les bilans d'énergie et d'entropie s'écrivent :

$$(5) \quad \frac{du}{dt} + u \nabla \cdot V = -\nabla \cdot q + T : \nabla V - \nabla \cdot \left(\sum_{i=1}^n \tilde{\mu}^i J^i \right) - \nabla \cdot \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda^{ij} (\nabla \cdot J^i + \rho^i \nabla \cdot V) \nabla \rho^j \right)$$

$$(6) \quad \frac{ds}{dt} + s \nabla \cdot V = -\nabla \cdot (q/T) + \sigma ; \quad \sigma \geq 0$$

σ est la production d'entropie, q le flux de chaleur. Il faut remarquer qu'on appelle habituellement flux de chaleur (notée alors, q) la quantité

que nous notons $(q + \sum_{i=1}^n \tilde{\mu}^i J^i)$. C'est grâce à ce changement (purement

formel) qu'on retrouve les équations classiques des mélanges en posant $\lambda^{ij} = 0$ pour tout i et j .

L'expression de la dissipation est usuelle :

$$(7) \quad T\sigma = -\frac{q}{T} \cdot \nabla T - J^i \cdot \nabla \tilde{\mu}^i + T^0 : \nabla V$$

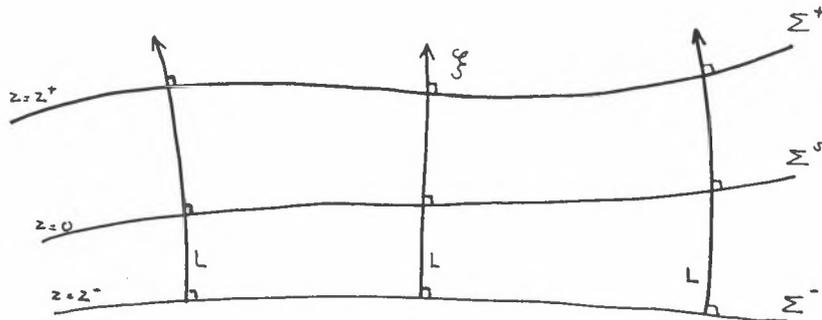
Il faut cependant noter que les lois de comportement obtenues dans le cadre de l'approximation linéaire de la thermodynamique des phénomènes irréversibles sont fortement modifiées par la présence dans les paramètres thermostatiques des paramètres vectoriels $\nabla \rho^i$.

Ce système d'équations permet - en théorie - d'étudier l'évolution d'un système multiphasique comme celle d'un fluide unique. Sa complexité le rend cependant peu utilisable directement. Il faut séparer le domaine d'étude en phases, zones où les équations des fluides newtoniens peuvent être utilisées, et en zones capillaires où ce système doit être utilisé.

3 - DESCRIPTION DES ZONES CAPILLAIRES

Soit L^0 une dimension caractéristique de l'écoulement considéré, ρ^0 une densité caractéristique du milieu. Dans les phases les gradients de densité sont d'ordre $\frac{\rho^0}{L^0}$ et l'on suppose que les coefficients λ^{ij} sont suffisamment petits pour que les termes $\lambda^{ij} \nabla \rho^j \cdot d(\nabla \rho^i)$ puissent être négligés dans l'équation (4). Dans les zones capillaires la distance caractéristique de variation des densités est l^0 , les termes $\lambda^{ij} \nabla \rho^j \cdot d(\nabla \rho^i)$ ne peuvent plus être négligés. Il apparait ainsi un petit paramètre $\epsilon = l^0/L^0$ et nous nous limitons dans cette étude à l'approximation d'ordre 0 en ϵ .

Les zones capillaires sont de petite dimension. Les zones interfaciales auxquelles nous nous intéressons plus particulièrement sont des couches d'épaisseur d'ordre l^0 . Nous admettons que les gradients des densités des divers constituants y sont colinéaires (à l'ordre 0 en ϵ) et nous notons ξ leur direction commune, L les lignes du champ ξ , Σ les surfaces orthogonales c'est-à-dire les surfaces d'isodensité. On note Σ^+ et Σ^- des surfaces Σ encadrant la zone capillaire, Σ^s une surface Σ choisie comme référence, z un coordonnée normale aux surfaces Σ et $h = \|\nabla z\|$. Ainsi la surface Σ^s (resp. Σ^-, Σ^+) a pour équation $z = 0$ (resp. $z = z^-, z = z^+$).



Vue en "coupe" d'une zone interfaciale

On note W un champ de vitesse (dite géométrique) conservant les surfaces Σ et les lignes L . Seule la composante normale $W_{\perp} = W \cdot \xi$ est bien définie. On donne cependant une composante tangentielle à W en choisissant une composante tangentielle arbitraire pour W^s , restriction de W à Σ^s . Ce choix sera fixé pour la commodité de la modélisation.

On note F_z l'application linéaire tangente à la projection de Σ^s sur la surface Σ d'équation $z = z^*$, le long des lignes L . Pour toute quantité X on définit en tout point M^s de Σ^s :

$$\langle X \rangle = \int_{z^-}^{z^+} X \det(F_z) h^{-1} dz$$

$$[[X]] = X(z^+) \det(F_{z^+}) - X(z^-) \det(F_{z^-})$$

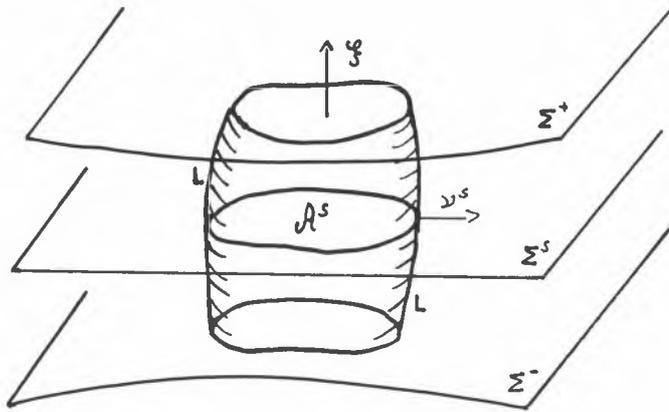
et pour tout tenseur Y d'ordre au moins 1 :

$$\langle Y \rangle = \int_{z^-}^{z^+} Y \cdot F_z^{-1} \det(F_z) h^{-1} dz$$

Les intégrales désignent des intégrales le long de la ligne L passant par M^s . Remarquons que ces deux types d'intégration ne peuvent être identifiés à l'ordre 0 en ϵ que si l'on suppose que $\nabla \xi$ est d'ordre $1/L^*$, (hypothèse que nous ne ferons pas).

On montre /12/ que les surfaces Σ^- et Σ^+ peuvent être choisies de manière à ce que $\det(Fz^+) = \det(Fz^-) = 1$ et qu'ainsi le terme $[[X]]$ apparaisse comme un terme de saut à travers l'interface : $[[X]] = X(z^+) - X(z^-)$.

Soit \mathcal{A}^s une partie de Σ^s se déplaçant avec la vitesse W^s , \mathcal{V} le volume engendré par les lignes L passant par \mathcal{A}^s et limité par les surfaces Σ^- et Σ^+ . ν^s est la normale extérieure au bord $\partial \mathcal{A}^s$ de \mathcal{A}^s et n la normale extérieure au bord $\partial \mathcal{V}$ de \mathcal{V} (cf. figure).



On a
$$\int_V X \, dv = \int_{A^s} \langle X \rangle \, ds$$

$$\int_{\partial V} Y \cdot n \, ds = \int_{A^s} \llbracket Y \cdot \xi \rrbracket \, ds + \int_{\partial A^s} \langle Y \rangle_{\parallel} \cdot \nu^s \, dl$$

où \parallel désigne la projection sur le plan tangent à Σ^s .

4- INTEGRATION DES LOIS DE BILAN

Les équations de bilan (1), (2), (3), (5), (6) peuvent se mettre sous la forme (8) où $\frac{\delta}{\delta t}$ désigne la dérivée suivant la vitesse W : $\frac{\delta}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} + W \cdot \nabla$.

$$(8) \quad \frac{\delta}{\delta t} \psi + \psi \nabla \cdot W + \nabla \cdot J = \Phi$$

Cette équation peut être intégrée à travers la zone interfaciale suivant la technique utilisée par A.M. ALBANO, D. BEDEAUX, J. VLIÉGER /9/. Cependant il est ici nécessaire d'intégrer sur un volume V du type défini au paragraphe précédent et ceci de manière à ce que le flux supplémentaire d'énergie

$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda^{ij} (\nabla \cdot J^i + \rho^i \nabla \cdot v^i) \nabla \rho^j$ disparaisse lors de l'intégration. En

d'autres termes, il faut intégrer le long des lignes L et c'est pourquoi il apparaît les deux types d'intégration $\langle \cdot \rangle$ et $\langle \cdot \rangle_{\parallel}$. On obtient alors l'équation

de bilan interfacial (9) où $\frac{\delta^s}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} + W^s \cdot \nabla$ et ∇^s désigne l'opérateur

de divergence surfacique de Σ^s .

$$(9) \quad \frac{\delta^s}{\delta t} \langle \psi \rangle + \langle \psi \rangle \nabla^s \cdot W^s + \llbracket J \cdot \xi \rrbracket + \nabla^s \cdot \langle J \rangle_{\parallel} = \langle \Phi \rangle$$

Dans l'étude d'un système multiphasique, l'équation (9) est utilisée comme condition aux limites pour le flux J de l'équation (8). On peut donc négliger les termes de l'équation (9) qui sont d'un ordre de grandeur inférieur aux flux $J(z^+) \cdot \xi$ et $J(z^-) \cdot \xi$.

Soit ψ^* la grandeur caractéristique de ψ dans les phases et t^* le temps caractéristique, les termes de (8) sont d'ordre ψ^*/t^* , J est d'ordre ψ^*L^*/t^* . Si ψ reste d'ordre ψ^* dans la zone interfaciale, $\langle \psi \rangle$ d'ordre $\psi^*l^* = \epsilon \psi^*L^*$ peut être négligé dans l'équation (9). C'est grâce à cette remarque qu'il n'est pas utile de faire intervenir des quantités en excès et que l'arbitraire introduit par le choix des surfaces Σ^- , Σ^s , Σ^+ disparaît.

L'application de ce qui précède au bilan de masse totale (2) et au bilan de quantité de mouvement (3) conduit aux équations :

$$(10) \quad \frac{\delta^s}{\delta t} \langle \rho \rangle + \langle \rho \rangle \nabla^s \cdot W^s + \nabla^s \cdot \langle \rho(V - W) \rangle_{\parallel} + \llbracket \rho(V - W^s) \rrbracket_{\perp} = 0$$

$$(11) \quad \frac{\delta^s}{\delta t} \langle \rho V \rangle + \langle \rho V \rangle \nabla^s \cdot W^s - \nabla^s \cdot T^s + \llbracket \rho V \otimes (V - W^s) - T \rrbracket_{\perp} = \langle f^{ext} \rangle$$

$$\text{avec } T^s = \langle T - \rho V \otimes (V - W) \rangle_{\parallel}$$

Ces deux équations montrent qu'il faut définir sur l'interface deux vitesses "matérielles", l'une liée au flux de masse $\langle \rho V \rangle$, l'autre liée à la quantité de mouvement interfaciale $\langle \rho V \rangle$. En particulier, on ne peut choisir W_{\parallel} tel que $\langle \rho(V - W) \rangle_{\parallel} = 0$ et $\langle \rho V \rangle = \langle \rho \rangle W^s$. Pour surmonter cette difficulté on peut supposer que ρ et V restent du même ordre de grandeur à l'intérieur et à l'extérieur des zones interfaciales et donc négliger $\langle \rho \rangle$, $\langle \rho(V - W) \rangle$ dans (10) et $\langle \rho V \rangle$, $\langle \rho V \otimes (V - W) \rangle$ dans (11). On négligera aussi $\langle f^{ext} \rangle$, les équations (10) et (11) se réduisent à

$$(12) \quad \llbracket \rho(V - W^s) \rrbracket_{\perp} = 0$$

$$(13) \quad \nabla^s \cdot T^s = \llbracket \rho V \otimes (V - W^s) - T \rrbracket_{\perp}$$

Avec ces hypothèses le tenseur T^s (appelé tenseur des contraintes interfaciales) est symétrique, aucune vitesse "matérielle" n'est définie à l'interface et la composante tangentielle de W^s reste arbitraire. Le fait d'avoir négligé la masse totale interfaciale n'entraîne pas d'obligation de négliger les masses interfaciales des divers constituants dont on peut écrire le bilan sous la forme suivante :

$$(14) \quad \frac{\delta^s}{\delta t} \langle \rho^i \rangle + \langle \rho^i \rangle \nabla^s \cdot W^s + \nabla^s \cdot J^{is} + \llbracket \rho^i (V - W^s) + J^i \rrbracket_{\perp} = 0$$

$$\text{avec } J^{is} = \langle \rho^i (V - W) + J^i \rangle_{\parallel}$$

Cette équation peut servir à décrire l'évolution de la quantité d'un surfactant présent à l'interface.

Le flux supplémentaire d'énergie $\sum_i \sum_j \lambda^{ij} (\nabla \cdot J^i + \rho^i \nabla \cdot V) \nabla \rho^j$ est négligeable à l'extérieur de la zone interfaciale, donc sur les surfaces Σ^- et Σ^+ . De plus il reste colinéaire au vecteur ξ , il n'apparaît pas dans le bilan interfacial d'énergie interne :

$$(15) \quad \frac{\delta^s}{\delta t} \langle u \rangle + \langle u \rangle \nabla^s \cdot W^s - T^s : \nabla^s W^s + \nabla^s \cdot J_e^s + \\ \llbracket q - T \cdot (V - W^s) + (u + \frac{1}{2} \rho (V - W^s)^2) (V - W^s) + \sum_{i=1}^n (\tilde{\mu}^i J^i) \rrbracket_{\perp} = 0 \\ \text{avec } J_e^s = \langle q - T \cdot (V - W^s) + \sum_{i=1}^n \tilde{\mu}^i J^i + u (V - W) \rangle_{\parallel}$$

Le bilan interfacial d'entropie s'écrit :

$$(16) \quad \frac{\delta^s}{\delta t} \langle s \rangle + \langle s \rangle \nabla^s \cdot W^s + \nabla^s \cdot J_s^s + \llbracket q/T + s(V - W^s) \rrbracket_{\perp} = \langle \sigma \rangle \\ \text{avec } J_s^s = \langle q/T + s(V - W) \rangle_{\parallel}$$

5 - THERMODYNAMIQUE DES INTERFACES

La relation de Gibbs (4) ne peut pas être intégrée. Nous sommes dans l'obligation d'admettre - et ce ne peut être qu'une approximation - que les paramètres $\langle \rho^i \rangle$ et $\langle s \rangle$ sont suffisants pour décrire l'état thermodynamique de l'interface. Nous admettons donc la relation de Gibbs interfaciale :

$$(17) \quad d \langle u \rangle = T^s d \langle s \rangle + \sum_{i=1}^n \mu^{is} d \langle \rho^i \rangle$$

La vitesse W^s ayant jusqu'à présent une composante tangentielle arbitraire, nous pouvons choisir celle-ci de telle manière que la relation (18) (habituellement postulée quelque soit le choix de W^s) entre le flux d'énergie et le flux d'entropie soit vérifiée. (les définitions (15) et (16) de J_e^s et J_s^s montrent que ces flux dépendent du choix de W_{\parallel}^s)

$$(18) \quad J_s^s = \frac{q^s}{T^s} \quad \text{avec} \quad q^s = j_e^s - \sum_{i=1}^n \mu_i^s J^i{}^s$$

Ainsi nous définissons la vitesse tangentielle de l'interface, non plus comme une vitesse matérielle mais comme une vitesse "thermodynamique". Cette vitesse ne sera pas donnée par l'équation de quantité de mouvement, mais par les lois de comportement de l'interface.

Les équations (17) et (18) permettent d'obtenir une expression pour la dissipation $T^s \langle \sigma \rangle$ et d'écrire les lois de comportement de l'interface dans le cadre de l'approximation linéaire des phénomènes irréversibles. Nous n'écrivons pas celles-ci dans toute leur généralité. Regardons, par exemple, les lois obtenues pour une interface séparant deux fluides (indices 1 et 2) non miscibles en présence d'un surfactant (indice 3) insoluble dans les deux fluides, à l'équilibre thermique :

Notons avec les indices $+$ et $-$ les quantités de part et d'autre de l'interface : $\rho^{1+} = \rho^{3+} = 0$, $\rho^{2-} = \rho^{3-} = 0$.

Il n'y a pas de transfert de masse : $V_{\perp}^{-} = V_{\perp}^{+} = W_{\perp}^s$

L'équation de conservation de la masse du surfactant est :

$$(19) \quad \frac{\delta^s}{\delta t} \langle \rho^3 \rangle + \langle \rho^3 \rangle \nabla^s \cdot W^s + \nabla^s \cdot J^{3s} = 0$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$(20) \quad \nabla^s \cdot T^s = T^{-} \cdot \xi - T^{+} \cdot \xi$$

Les lois de comportement donnent alors T^s , J^{3s} , et W^s par

$$(21) \quad T^s = (\gamma^s + \nu^s \nabla^s \cdot W^s) (\mathbb{1} - \tilde{\xi} \otimes \tilde{\xi}) + \mu^s \nabla^s W^s \cdot (\mathbb{1} - \tilde{\xi} \otimes \tilde{\xi})$$

$$(22) \quad J^{3s} = -K^s \nabla^s \mu^{3s} + K' \xi \cdot \Pi_{\parallel}^s - K'' \xi \cdot \Pi_{\parallel}^s$$

$$(23) \quad (V^{+} - W^s)_{\parallel} = K' \nabla^s \mu^{3s} + K^{+} \xi \cdot \Pi_{\parallel}^s - K''' \xi \cdot \Pi_{\parallel}^s$$

$$(24) \quad (V^{-} - W^s)_{\parallel} = K'' \nabla^s \mu^{3s} + K''' \xi \cdot \Pi_{\parallel}^s - K^{-} \xi \cdot \Pi_{\parallel}^s$$

Dans (21) γ^s est la tension superficielle, ν^s et μ^s les coefficients de viscosité de dilatation et de cisaillement de surface. Les équations (20) et (21) permettent d'écrire des généralisations des équations de Laplace et de Marangoni tenant compte des effets de viscosité de surface. Dans les équations (22), (23) et (24) K^s est le coefficient de diffusion du surfactant sur l'interface, K^{+} et K^{-} sont des coefficients de frottement permettant le calcul de W^s ainsi que le calcul d'un éventuel "glissement" ($V_{\parallel}^{+} - V_{\parallel}^{-}$) à l'interface, enfin K' , K'' , K''' sont des coefficients de couplage (éventuellement nuls).

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- /1/ J. BOUSSINESQ. - Compt. Rend., 156, 983, 1035, 1124 (1913)
- /2/ V.G. LEVITCH. - Physico-Chemical hydrodynamics, Englewood Cliffs N.J. Prentice Hall, INC (1962).
- /3/ R.G. COX. - J. Fluid Mech., vol. 168, p. 169-220 (1986).
- /4/ D. BEDEAUX, A.M. ALBANO et P. MAZUR. - Physica, vol. 82A, p. 438-462.

- /5/ J. KOVAC. - Physica, 86A, p. 1-24 (1977).
- /6/ J.M. DELAYE. - Thermohydraulics of two-phase systems for industrial design and nuclear engineering, Hemisphere Publishing Corporation, Washington, p. 95-115 (1981).
- /7/ N. DAHER et G.A. MAUGIN. - Acta Mechanica, vol. 60, p. 217-240 (1986)
- /8/ J.W. GIBBS. - The Scientific Papers of J.W. Gibbs, Dover Publications, INC New York, Vol. 1, p. 219-274 (1961).
- /9/ A.M. ALBANO, D. BEDEAUX, J. VLIEGER. - Physica 99A, p. 293-304, (1979).
- /10/ R. GATIGNOL. - Revue Roumaine des Sciences Techniques. Mécanique Appliquée, vol. 3 (1987).
- /11/ P. CASAL et H. GOUIN. - C.R. Acad. Sc. Paris, t. 300, Série II N°7, p. 231-234 (1985).
- /12/ P. SEPPECHER. - Etude d'une Modélisation des zones capillaires fluides : Interfaces et lignes de contact, Mémoire de Thèse. Université Paris VI (1987).
- /13/ P. GERMAIN. - J. Méca., vol. 12, p. 235-274 (1973).
- /14/ R. GATIGNOL et P. SEPPECHER. - Journal de Mécanique Théorique et Appliquée Numéro Spécial 1986, p. 225 - 247.