Transitions de phases avec un potentiel dégénéré à l'infini, application à l'équilibre de petites gouttes.

Guy Bouchitté, Christophe Dubs et Pierre Seppecher

Résumé- Dans le but de modéliser l'équilibre de gouttes de très petite taille, nous étudions le comportement limite des solutions lorsque ε tend vers 0 des problèmes de minimisation:

$$(\mathcal{P}_\varepsilon) \qquad \inf\left\{\int_\Omega W(u(x)) \;+\varepsilon\, u'^2(x)\, dx \quad , \int_\Omega u\; dx = M\right\}$$

où W est une fonction positive nulle seulement en un point $u_0 \in \mathbb{R}$ et telle que $\lim_{t\to+\infty} \frac{W(t)}{t} = 0$. La configuration limite fait apparaitre une mesure atomique correspondant à une répartition de masse en gouttelettes.

Phase transition with a potential degenerated at infinity, application to droplets equilibrium.

Abstract- *In order to modelize the equilibrium of very small drops, we study the asymptotic behaviour as* ε *tends to* 0 *of the minimizers of:*

$$(\mathcal{P}_\varepsilon) \qquad \inf\left\{\int_\Omega W(u(x)) \;+\varepsilon\, u'^2(x)\, dx \quad , \int_\Omega u\; dx = M\right\}$$

The function W *is non negative, vanishes only at* $u_0 \in \mathbb{R}$ *and satisfies* $\lim_{t\to+\infty} \frac{W(t)}{t} = 0$. *In the limit configuration, the mass distribution contains an atomic measure which corresponds to droplets.*

Abridged english version - Let u_0 and $M > 0$ be two real numbers, Ω a compact subset of $\mathbb{R}$ and W a fonction on $\mathbb{R}$ satisfying the assumptions:

(H1) $W \geq 0$, $W(u) = 0 \iff u = u_0$,

(H2) W is continuous on $[u_0, +\infty[$, $W = +\infty$ on $]-\infty, u_0[$,

(H3) $\exists p < 1$, $\exists c > 0$, such that $\lim\limits_{t\to+\infty} W(t).t^{-p} = c$,

(H4) W is increasing on $[u_0, u_1]$ $(u_1 > u_0)$ and $\lim\limits_{u\to u_0^+} \dfrac{W(u)}{u-u_0} > 0$.

We study the asymtotic behaviour as ε tends to 0 of the minimization problems:

$$(\mathcal{P}_\varepsilon) \qquad \inf\left\{\int_\Omega W(u(x)) \;+\varepsilon\, u'^2(x)\, dx \quad ; \int_\Omega u(x)\, dx = M\right\}.$$

In this note, we show that the value of $\inf \mathcal{P}_\varepsilon$ behaves like λ_ε defined by $\lambda_\varepsilon = \varepsilon^\gamma$ with $\gamma = \inf\left(\frac{p-1}{p-4}, \frac{1}{2}\right)$ if $p \neq -2$ and $\lambda_\varepsilon = \varepsilon^{1/2}\log\varepsilon$ if $p = -2$ and we identify the limit of the rescaled energies:

$$F_\varepsilon(u) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_\varepsilon} \int_\Omega W(u(x)) \;+\varepsilon\, u'^2(x)\, dx & \text{if } u \in H^1(\Omega) \\ +\infty & \text{else.} \end{cases}$$

This problem is close to the classical problem solved by Modica (Modica, 1987) where the function W is a two-wells function (in this case $\gamma = 1/2$). In our case, the degenerated behaviour of W at infinity ($\lim_{t\to\infty} t^{-1}W(t) = 0$) replaces the second well. The limit problem still exhibits two "phases": a "vapour phase" represented by the measure $u_0\, dx$ and a "liquid phase" represented by a purely atomic measure $\mu = \sum m_i \delta_{x_i}$. In part 3, we show how this problem arises from the mechanical study of very small (one-dimensional) drops. In this model a drop of mass m located at x is represented by the measure $m\delta_x$. We show that the contribution of such a drop to the total energy depends on the mass at the position through the function f defined by:

$$f(x,m) = 2^{2\gamma}\ k\,(m)^{1-2\gamma} \text{ if } x \notin \partial\Omega, \quad f(x,m) = k\,(m)^{1-2\gamma} \text{ if } x \in \partial\Omega$$

where k is a scalar depending on the shape of W:

$$k = k_p := \begin{cases} 2\displaystyle\int_{u_0}^{+\infty} \sqrt{W(s)}\, ds & \text{if } p < -2\ , \\ (1-2\gamma)\, c^{1-\gamma} \left(\dfrac{2}{1-p} \displaystyle\int_0^{+\infty} (t^2+1)^{-\frac{5-2p}{2-2p}}\, dt \right)^{2\gamma} & \text{if } p \in]-2,1[, \\ \sqrt{c}/3 & \text{if } p = -2. \end{cases}$$

More precisely, F being defined by (5), our convergence result is the following:

Theorem : *Under the assumptions (H1)-(H4) we have :*
(i) For every measure μ in $\mathcal{M}(\Omega)$, for every sequence (u_ε) tending to μ in $\mathcal{M}(\Omega)$ weak∗, we have

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq F(\mu).$$

(ii) For every μ in $\mathcal{M}(\Omega)$ there exists a sequence (u_ε) such that

$$u_\varepsilon \rightharpoonup \mu \text{ in } \mathcal{M}(\Omega) \text{ weak} * \qquad \text{and} \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) = F(\mu),$$

moreover we can choose this sequence such that $\int_\Omega u_\varepsilon\, dx = \mu(\Omega)$.

To obtain the lowerbound (i) for the energy, we prove that the energy on almost every interval can be estimated by imposing, in addition, Dirichlet conditions on its boundary (Lemma 1). This estimate is given by Lemma 2. Then an argument of concentration-compactness for measures implies that the limit liquid mass distribution is purely atomic. The explicit construction of an approximating sequence gives the upperbound (ii) for the energy.

---

1. INTRODUCTION ET ENONCE DU RESULTAT - Soit deux réels u_0 et $M > 0$, Ω un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et W une fonction sur $\mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses:

(H1) $W \geq 0$, $W(u) = 0 \iff u = u_0$,

(H2) W est continue sur $[u_0, +\infty[$, $W = +\infty$ sur $]-\infty, u_0[$,

(H3) $\exists p < 1$, $\exists c > 0$, tel que $\lim\limits_{t \to +\infty} W(t).t^{-p} = c$,

(H4) W est croissante sur un intervalle $[u_0, u_1]$ $(u_1 > u_0)$ et $\lim\limits_{u \to u_0^+} \dfrac{W(u)}{u - u_0} > 0$.

On étudie le comportement limite quand ε tend vers 0 des problèmes de minimisation:

$$(\mathcal{P}_\varepsilon) \qquad \inf \left\{ \int_\Omega W(u(x)) \ + \varepsilon\, u'^2(x)\, dx \quad , \int_\Omega \ u\ dx = M \right\}$$

Dans cette note nous montrons que la valeur de $\inf \mathcal{P}_\varepsilon$ se comporte comme

$$(1) \qquad \lambda_\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon^\gamma \text{ avec } \gamma = \inf\left(\frac{p-1}{p-4}, \frac{1}{2}\right) & \text{si } p \neq -2 \\ \varepsilon^{1/2} \log \varepsilon & \text{si } p = -2. \end{cases}$$

Nous identifions la limite des énergies rescalées:

$$(2) \qquad F_\varepsilon(u) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_\varepsilon} \int_\Omega W(u(x)) \ + \varepsilon\, u'^2(x)\, dx & \text{si } u \in H^1(\Omega) \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce problème est voisin du problème classique traité par Modica (Modica, 1987) dans lequel la fonction W est une fonction à deux puits (dans ce cas $\gamma = 1/2$). Dans notre cas c'est la dégénérescence de W à l'infini ($\lim_{t\to\infty} t^{-1}W(t) = 0$) qui joue le rôle du deuxième puits. Le problème limite fait encore apparaître deux "phases", la répartition de la masse étant, pour l'une, la mesure de densité u_0 par rapport à la mesure de Lebesgue, pour l'autre, une mesure purement atomique $\mu = \sum m_i \delta_{x_i}$. La partie 3 montre comment ce problème dérive de l'étude mécanique de gouttes (unidimensionnelles) de taille très petite ce qui conduit à appeler "goutte" chacune des mesures $m_i\delta_{x_i}$. Nous montrons que la contribution d'une goutte $m\delta_x$ à l'énergie du système dépend en général de sa masse m et de sa position x. Cette contribution est égale à $f(x, m)$ défini par:

$$(3) \qquad f(x,m) = 2^{2\gamma}\ k\,(m)^{1-2\gamma} \text{ si } x \notin \partial\Omega, \quad f(x,m) = k\,(m)^{1-2\gamma} \text{ si } x \in \partial\Omega$$

où k est un scalaire dépendant de la forme de la fonction W:

$$(4) \quad k = k_p := \begin{cases} 2\displaystyle\int_{u_0}^{+\infty} \sqrt{W(s)}\, ds & \text{si } p < -2\ , \\ (1-2\gamma)\, c^{1-\gamma} \left(\dfrac{2}{1-p} \displaystyle\int_0^{+\infty} (t^2+1)^{-\frac{5-2p}{2-2p}}\, dt \right)^{2\gamma} & \text{si } p \in]-2, 1[, \\ \sqrt{c}/3 & \text{si } p = -2. \end{cases}$$

Plus précisément, définissons F par:

$$(5) \qquad F(\mu) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^n f(x_i, m_i) & \text{si } \mu = u_0\, dx + \displaystyle\sum_{i=1}^n m_i\delta_{x_i},\ m_i > 0\ (x_i \text{ distincts}), \\ +\infty & \text{si } \mu \text{ n'est pas de la forme ci-dessus.} \end{cases}$$

Theorème : *Sous les hypothèses (H1)-(H4) on a :*
*(i) Pour toute mesure μ de $\mathcal{M}(\Omega)$, pour toute suite (u_ε) tendant vers μ dans $\mathcal{M}(\Omega)$ *faible, on a*

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq F(\mu).$$

(ii) Pour tout μ dans $\mathcal{M}(\Omega)$ il existe une suite (u_ε) telle que

$$u_\varepsilon \rightharpoonup \mu \textit{ dans } \mathcal{M}(\Omega)\ *\textit{faible} \qquad \textit{et} \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) = F(\mu),$$

on peut de plus imposer à cette suite de vérifier la contrainte $\int_\Omega u_\varepsilon\ dx = \mu(\Omega)$.

Remarque: - La relative compacité faible d'une suite u_ε est assurée lorsque celle-ci vérifie la contrainte de masse $\int_\Omega u_\varepsilon\ dx = M$ (comme dans le problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$). On en déduit immédiatement qu'il existe C tel que $\inf \mathcal{P}_\varepsilon \sim C\lambda_\varepsilon$. En effet, d'après le théorème, toute solution u_ε du problème $\mathcal{P}_\varepsilon$ converge (à une suite extraite près) vers une mesure μ de la forme $u_0 dx + \sum_{i=1}^n m_i\delta_{x_i}$ qui minimise $F(\mu)$ sous la contrainte

$\sum_{i=1}^{n} m_i = M - u_0|\Omega|$. La sous aditivité de $f(x,\cdot)$ montre que $\mu - u_0 dx$ est une unique masse de Dirac (située sur le bord de Ω).
- En l'absence de contrainte intégrale, la relative compacité des suites u_ε ne peut se déduire (exepté dans le cas $p \geq 0$) du simple fait que *sup* $F_\varepsilon(u_\varepsilon) < +\infty$.
- Le théorème peut être appliqué à d'autres problèmes de minimisation du même type que $\mathcal{P}_\varepsilon$, par exemple: $\inf\{\int_\Omega \left[W(|u'|) + \varepsilon\, u''^2 + |u-g|^2\right] dx \ ; \ u \in H^2(\Omega)\}$ (dont la limite fait apparaître la fonctionnelle de Munford et Shah (Munfor, 1989) introduite dans les problèmes de segmentation d'images).

2. PREUVE DU THEOREME - Soit (u_ε) une suite vérifiant *sup* $F_\varepsilon(u_\varepsilon) < +\infty$ et convergeant $*$-faiblement vers une mesure μ. Il est facile de déduire des hypothèses (H1) et (H2) qu'il existe une sous-suite de u_ε (encore notée u_ε) telle que $u_\varepsilon \to u_0$ Lebesgue p.p. Dorénavant, nous supposons sans perte de généralité que $u_0 = 0$. On définit les fonctionnelles localisées en posant pour toute fonction v de $H^1(\mathbb{R})$, pour tout intervalle I, $F_\varepsilon(v, I) = \varepsilon^{-\gamma} \int_I W(v) + \varepsilon v'^2 \, dx$. On cherche à estimer la limite inférieure de $F_\varepsilon(., I)$ pour tout intervalle I. Le lemme 1 montre que, pour la plupart des intervalles, cette limite ne varie pas si l'on impose de plus à la suite u_ε de vérifier $u_\varepsilon = 0$ sur ∂I. On peut alors minorer $F_\varepsilon(u_\varepsilon, I)$ par l'infimum d'un problème de Dirichlet dont le calcul précis est donné par le Lemme 2.

Lemme 1 : *Soit un intervalle $I \not\subseteq \Omega$ tel que $u_\varepsilon \to 0$ sur $\partial I \backslash \partial\Omega$. Alors il existe un intervalle $I_\delta \supset I$ et une suite (u_ε^0) définie sur I_δ vérifiant :*
(i) $u_\varepsilon^0 = 0$ *sur* ∂I_δ, $u_\varepsilon = u$ *sur* I, $\int_{I_\delta \backslash I} u_\varepsilon^0 dx \to 0$.
(ii) $\liminf_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon^0, I_\delta \cap \Omega) = \liminf_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon, I)$
(iii) Dans le cas où I rencontre le bord de Ω, on peut imposer de plus à u_ε^0 d'être symétrique par rapport au point d'intersection de I avec Ω.

Preuve : Dans le cas où $\partial I \cap \partial\Omega = \emptyset$, on prolonge de manière affine la fonction u_ε en dehors de I jusqu'à ce qu'elle atteigne la valeur 0 sur une distance adaptée pour que $F_\varepsilon(u_\varepsilon^0, I_\delta \backslash I)$ tende vers 0 lorsque $\varepsilon \to 0$. Dans le cas où $\partial I \cap \partial\Omega \neq \emptyset$, on prolonge u_ε par réflexion et on se ramène au cas précédent. □

Lemme 2 : *Soit $a \in \mathbb{R}^+$, (m_ε) une suite de réels positifs tendant vers $m > 0$. On note $\mathcal{K}_\varepsilon = \left\{ v \in H^1(\mathbb{R}) \ : \ v(\pm a) = 0, \ \int_{-a}^{a} v(x)\, dx = m_\varepsilon \right\}$. Alors le problème $\inf\{F_\varepsilon(v, [-a,a]); v \in \mathcal{K}_\varepsilon\}$ admet une solution $\overline{v}_\varepsilon$ paire croissante sur $[-a, 0]$. De plus, k étant défini par (4):*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(\overline{v}_\varepsilon, [-a,a]) = 2^{2\gamma} \ k\,(m)^{1-2\gamma} \ .$$

Preuve : L'existence d'une solution paire croissante sur $[-a, 0]$ se déduit d'un argument de réarrangement (Mossino, 1984). Pour l'estimation de l'énergie minimale, on limite donc notre étude à $[-a, 0]$. Nous supposons[1] qu'il existe b tel que $W(u) = c\,u^p$ pour $u > b$. L'intégration de l'équation d'Euler $W'(\overline{v}_\varepsilon) - 2\varepsilon\,\overline{v}_\varepsilon'' = C_\varepsilon$, vérifiée sur l'intervalle ouvert $\{\overline{v}_\varepsilon > 0\}$, conduit à:

$$(6) \qquad \varepsilon\,(\overline{v}_\varepsilon{}'(x))^2 = W(\overline{v}_\varepsilon(x)) - C_\varepsilon \overline{v}_\varepsilon(x) - D_\varepsilon \qquad , \ \forall x \in [-a, 0] \cap \{\overline{v}_\varepsilon > 0\}$$

[1] La généralisation à une fonction quelconque vérifiant $(H3)$ est obtenue en construisant pour tout encadrement $c_1 < c < c_2$, un encadrement $W_1 < W < W_2$ tel que $W_i(t)/t = c_i$ pour t suffisament grand.

où C_ε est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte m_ε et D_ε est une constante d'intégration. La croissance de $\overline{v}_\varepsilon$ exclut en fait une discontinuité de $\overline{v}_\varepsilon{}'$ sur la frontière du support $[-\ell_\varepsilon, 0]$ de $\overline{v}_\varepsilon$. Ainsi l'équation (6) est satisfaite sur tout l'intervalle $[-a, 0]$. En particulier, en $-a$, on obtient $D_\varepsilon \leq 0$. Par ailleurs, la convergence *p.p.* vers 0 de $\overline{v}_\varepsilon$ entraine que $\overline{v}_\varepsilon$ converge faiblement vers $m\delta_0$, que $b_\varepsilon := \overline{v}_\varepsilon(0)$ tend vers l'infini (avec $\overline{v}_\varepsilon{}'(0) = 0$). De l'équation (6) on déduit que la longueur ℓ_ε du support de $\overline{v}_\varepsilon$ vérifie $\ell_\varepsilon = \mid \{\overline{v}_\varepsilon \geq \alpha\} \mid + \sqrt{\varepsilon} \int_0^\alpha (W(u) - C_\varepsilon u - D_\varepsilon)^{-1/2}\, du$ pour tout α positif. Le premier terme tend vers 0. D_ε étant négatif, le second peut être majoré par l'intégrale $\int_0^\alpha \sqrt{\varepsilon}(W(u) - C'_\varepsilon u)^{-1/2}\, du$ (où $C'_\varepsilon = b_\varepsilon^{-1} W(b_\varepsilon) \to 0$) qui tend vers 0 du fait que l'intégrale de $W^{-1/2}$ est convergente en 0 (cf. (H4)). Comme ℓ_ε tend vers 0, $\overline{v}_\varepsilon{}'(-a) = 0$ et donc $D_\varepsilon = 0$ pour ε suffisament petit. En réutilisant (6), on obtient $C_\varepsilon = b_\varepsilon^{-1} W(b_\varepsilon) \to 0$ et les égalités suivantes:

$$m_\varepsilon = 2\,\sqrt{\varepsilon} \int_0^{b_\varepsilon} \frac{u}{\sqrt{W(u) - C_\varepsilon u}}\, du\,, \tag{7}$$

$$I_\varepsilon := 2F_\varepsilon(\overline{v}_\varepsilon, [-a, 0]) = 2\varepsilon^{\frac{1}{2}-\gamma} \int_0^{b_\varepsilon} \frac{2W(u) - C_\varepsilon u}{\sqrt{W(u) - C_\varepsilon u}}\, du\,. \tag{8}$$

Lorsque $p < -2$ ($\gamma = 1/2$) l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sqrt{W(s)}\, ds$ est convergente. Dans la décomposition $I_\varepsilon = 2\int_0^{b_\varepsilon} (W(u) - C_\varepsilon u)^{1/2}\, du + \int_0^{b_\varepsilon} C_\varepsilon u (W(u) - C_\varepsilon u)^{-1/2}\, du$, le premier terme converge vers $k = 2\int_0^{+\infty} \sqrt{W(s)}\, ds$ et le deuxième, dû au comportement de W à l'infini, tend vers zéro. De ce fait la limite de I_ε est indépendante de m. Dans le cas où $-2 < p < 1$, comme $\gamma < 1/2$, les intégrales I_ε et m_ε sont équivalentes aux contributions sur l'intervalle $[b, b_\varepsilon]$. En posant $t_b = (C_\varepsilon^{-1}\, c\, b^{p-1} - 1)^{1/2}$ et le changement de variable $t = (C_\varepsilon^{-1} c u^{p-1} - 1)^{1/2}$ on obtient:

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(\overline{v}_\varepsilon) &\sim 2\, c^{\frac{3}{4-p}}\, \frac{2+p}{4-p} \left(\frac{2}{1-p} \int_0^{t_b} (t^2+1)^{-\frac{5-2p}{2p-2}}\, dt \right)^{\frac{2p-2}{p-4}} (m_\varepsilon/2)^{\frac{p+2}{4-p}} \\ &+ 2\, \varepsilon^{\frac{5}{2}\left(\frac{p+2}{4-p}\right)}\, c^{\frac{3}{4-p}} \frac{4}{4-p} \frac{t_b}{(t_b^2+1)^{\frac{3}{2-2p}}} \left(\frac{2}{1-p} \int_0^{t_b} (t^2+1)^{-\frac{5-2p}{2p-2}}\, dt \right)^{\frac{p+2}{4-p}} (m_\varepsilon/2)^{\frac{p+2}{4-p}}\,. \end{aligned}$$

t_b tendant vers l'infini, le résultat est obtenu par passage à la limite $\varepsilon \to 0$. $\square$

Fin de la preuve du théorème. Quitte à extraire une sous suite on peut supposer que $\liminf F_\varepsilon(u_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) < +\infty$ et que la suite $f_\varepsilon := \varepsilon^{-\gamma}[W(u_\varepsilon) + \varepsilon u'^2_\varepsilon]$, bornée dans $L^1(\Omega)$, converge $*$-faiblement vers une mesure de Radon ν. Comme u_ε converge vers 0 sauf sur un ensemble Δ de mesure de Lebesgue nulle, on peut appliquer les lemmes 1 et 2 à tout intervalle I tel que $\partial I \cap \Delta = \emptyset$. En se restreignant de plus à des intervalles dont le bord n'est chargé ni par μ ni par ν, on obtient:

$$\nu(I) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_I f_\varepsilon(t)\, dt \geq c(\mu(I))^{1-2\gamma} \text{ avec } c = \begin{cases} k2^{2\gamma} & \text{si } I \cap \partial\Omega = \emptyset \\ k & \text{si } I \cap \partial\Omega \neq \emptyset \end{cases} \tag{9}$$

L'inégalité (9) s'étend à tout Borélien B par approximation: $\nu(B) \geq c(\mu(B))^{1-2\gamma}$. Du fait que $0 < 1 - 2\gamma < 1$ on peut appliquer l'argument de concentration des mesures dû à P.L.Lions (cf. (Evans, 1989)): ν est une combinaison de masses de Dirac. L'inégalité (9) donne alors immédiatement la minoration de l'assertion (i). Soit maintenant μ une mesure de Radon de la forme $\sum_{i=1}^{n} m_i \delta_{x_i}$ et (I_i) des intervalles deux à deux disjoints centrés sur les points x_i. La suite (u_ε) égale sur chaque I_i à la fonction $\overline{v}_\varepsilon$ définie dans le lemme 2 (et nulle en dehors) vérifie la proposition (ii) du théorème. $\square$

3. ORIGINE MECANIQUE DU PROBLEME - L'étude de l'équilibre diphasique d'une masse M de fluide confiné dans un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ et d'énergie libre volumique W correspond au problème variationnel $(\mathcal{P}_\varepsilon)$. La fonction W est continue, positive et s'annule seulement en deux valeurs α et β correspondant aux deux phases. Ce modèle de fluide (dit de Cahn-Hilliard (Cahn, 1959)) possède sa propre longueur caractéristique (l'épaisseur de la couche de transition), en général beaucoup plus petite que la taille de Ω. Dans le problème adimentionnel, ε apparait comme un petit paramètre caractéristique du rapport entre ces deux longueurs. Si l'on cherche à étudier le comportement de petites gouttes dans un grand domaine, la densité moyenne $\rho_m = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \rho \, dv$ est proche de α. Le rapport $\eta = \dfrac{\rho_m - \alpha}{\beta - \alpha}$ introduit un nouveau petit paramètre. Le choix de $\rho_m - \alpha$ comme densité caractéristique nous amène à considérer des fonctions W dont le deuxième puits est η^{-1} qui tend vers l'infini. Cette note constitue une première étape dans l'étude de ce problème à deux paramètres: nous considérons une fonction W dont le deuxième puits est directement porté à l'infini (hypothèses (H1)-(H4)).

Références

J.MOSSINO, Inégalités isopérimétriques et applications en physique, *Hermann* (1984).

L.MODICA, The gradient theory of phase transitions and the minimal interface criterium, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 98, (1987), pp.123-142.

J.W.CAHN and J.E.HILLIARD, Free energy of a non-uniform system, J. Chem. Phy. 31, 3, (1959), pp.688-699.

D.MUMFORD and J.SHAH, Optimal approximation by piecewise smooth functions and associated variational problems, *Comm. Pure Appl. Math.*, XLII, (1989), pp.577.

L.EVANS Weak convergence methods for non linear partial differential equations, *CBMS*, N.74 (1989).

G.B.,C.D.,P.S.: Laboratoire d'Analyse Non Linéaire Appliquée,
Université de Toulon et du Var, 83957 La Garde Cedex, France.

Proposition de Note aux Comptes Rendus

La Garde, le 21 Novembre 1995,

Rubrique: Problèmes mathématiques de la Mécanique

Titre français: Transitions de phases avec un potentiel dégénéré à l'infini, application à l'équilibre de petites gouttes.

Titre anglais: Phase transition with a potential degenerated at infinity, application to droplets equilibrium.

Titre courant: Un modèle de transitions de phases.

Auteurs: Guy Bouchitté, Christophe Dubs et Pierre Seppecher

Abstract:

Dans le but de modéliser l'équilibre de gouttes de très petite taille, nous étudions le comportement limite des solutions lorsque ε tend vers 0 des problèmes de minimisation:

$$(\mathcal{P}_\varepsilon) \qquad \inf\left\{\int_\Omega W(u(x)) \; + \varepsilon\, u'^2(x)\, dx \quad , \int_\Omega \; u \; dx = M\right\}$$

où W est une fonction positive nulle seulement en un point $u_0 \in \mathbb{R}$ et telle que $\lim_{t\to+\infty} \frac{W(t)}{t} = 0$. La configuration limite fait apparaitre une mesure atomique correspondant à une répartition de masse en gouttelettes.

Résumé:

In order to modelize the equilibrium of very small drops, we study the asymptotic behaviour as ε tends to 0 of the minimizers of:

$$(\mathcal{P}_\varepsilon) \qquad \inf\left\{\int_\Omega W(u(x)) \; + \varepsilon\, u'^2(x)\, dx \quad , \int_\Omega \; u \; dx = M\right\}$$

The function W is non negative, vanishes only at $u_0 \in \mathbb{R}$ and satisfies $\lim_{t\to+\infty} \frac{W(t)}{t} = 0$. In the limit configuration, the mass distribution contains an atomic measure which corresponds to droplets.

Adresses: G.B.,C.D.,P.S.: Laboratoire d'Analyse Non Linéaire Appliquée, Université de Toulon et du Var, 83957 La Garde Cedex, France.

Tel. 94 14 23 81/85, Télécopie 94 14 21 68, Email anla@malte.univ-tln.fr