C.R. Acad. Sci. Paris
Mathématiques/*Mathematics*

Shape Optimization Solutions via Monge-Kantorovich Equation.

Guy BOUCHITTE*, Giuseppe BUTTAZZO and Pierre SEPPECHER***

*Laboratoire d'Analyse Non Linéaire Appliquée,
Université de Toulon et du Var, BP 132, 83957 LA GARDE Cedex, France.

** Dipartimento di Matematica
Università di Pisa ,Via Buonarroti, 2, 56127 PISA, Italy.

Abstract- We consider the optimization problem

$$\max\Big\{\mathcal{E}(\mu)\ :\ \mu \text{ nonnegative measure, } \int d\mu = m\Big\},$$

where $\mathcal{E}(\mu)$ is the energy associated to μ:

$$\mathcal{E}(\mu) = \inf\Big\{\frac{1}{2}\int |Du|^2\,d\mu - \langle f, u\rangle\ :\ u \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)\Big\}.$$

The datum f is a signed measure with finite total variation and zero average. We show that the optimization problem above admits a solution which is not in $L^1(\mathbf{R}^n)$ in general. This solution comes out by solving a suitable Monge-Kantorovich equation.

Solutions d'un problème d'optimisation de forme par la résolution d'une équation de Monge-Kantorovich.

Résumé- *Nous considérons le problème d'optimisation*

$$\max\Big\{\mathcal{E}(\mu)\ :\ \mu \textit{ mesure positive, } \int d\mu = m\Big\},$$

où $\mathcal{E}(\mu)$ est l'énergie associée à μ par

$$\mathcal{E}(\mu) = \inf\Big\{\frac{1}{2}\int |Du|^2\,d\mu - \langle f, u\rangle\ :\ u \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)\Big\}.$$

La donnée f est une mesure signée de variation totale finie et de moyenne nulle. Nous montrons que ce problème d'optimisation admet une solution qui, en général, n'appartient pas à $L^1(\mathbf{R}^n)$. Cette solution est obtenue par la résolution d'une variante de l'équation de Monge-Kantorovich.

Version Francaise Abrégée Récemment de grands progrès ont été réalisés dans la compréhension mathématique des problèmes d'optimisation de forme, notamment grâce au développement des techniques d'homogénéisation et de Γ-convergence. Il est apparu clairement que dans de nombreuses situations l'existence d'une solution optimale n'est assurée que sous une forme relaxée. Par exemple, dans le cas où l'on cherche comment disposer de manière optimale deux conducteurs homogènes, isotropes et dont la proportion est fixée, les solutions relaxées ont été complètement identifiées: elles correspondent à un matériau dont la matrice de conductivité n'est pas isotrope en général. Ceci s'explique par le fait que les matériaux se stratifient au cours du processus d'optimisation.

Par ailleurs lorsque la proportion du matériau le plus conducteur tend vers zéro, l'apparition de structures d'une dimension inférieure a été étudiée [1]. Pour tenir compte de ce phénomène et afin de pouvoir considérer des sources ponctuelles (incompatibles pour des raisons capacitaires avec le cadre fonctionnel habituel), nous proposons d'admettre comme coefficient de conduction toute mesure positive. Ainsi pour un terme source donné sous la forme d'une mesure (de moyenne nulle), nous cherchons une mesure optimale (de masse fixée). Notre résultat principal établit l'existence d'une telle mesure. Cette mesure peut être composée de termes de dimensions différentes. Remarquons qu'il n'est pas nécessaire d'introduire des matériaux anisotropes pour atteindre l'optimum.

Notre argument essentiel consiste à montrer l'équivalence avec le problème de transfert de masse de Monge-Kantorovich. Nous étendons ensuite les résultats récents de Evans et Gangbo [5] qui relient ce problème de transfert de masse à une équation aux dérivées partielles.

On considère un matériau conducteur représenté par une mesure positive μ sur $\mathbf{R}^n$ et soumis à une source de chaleur représentée par une mesure signée f. Pour une distribution régulière de température u, l'énergie dissipée est $E(\mu,u)$ donnée par (1) et son infimum est noté $\mathcal{E}(\mu)$ (cf. (2)). Notons que $\mathcal{E}(\mu)$ peut être égal à $-\infty$ par exemple si f est atomique et μ est la mesure de Lebesgue. Ces cas sont éliminés puisque notre problème est la recherche de la mesure μ maximisant $\mathcal{E}$ (cf. le problème (3)).

Nous commençons par écrire le problème (4), dual du problème (1). Du fait que la variable duale σ vérifie la contrainte $-\operatorname{div}(\sigma\mu) = f$, l'inégalité de Cauchy-Schwartz (5) entraîne que $\mathcal{E}(\mu)$ est majoré par $-\frac{1}{2m}|I(f)|^2$ où $I(f)$ est donné par le problème (6). Ce dernier problème, connu sous le nom de "problème de transfert de masse de Monge-Kantorovitch", admet une solution. On écrit sa formulation duale (7) qui admet pour solution une mesure vectorielle de la forme $\theta\mu$ où μ est une mesure positive et θ est une densité vectorielle à valeur dans la sphère unité de $\mathbf{R}^n$. Les travaux récents de Evans et Gangbo [5] ont montré que, sous l'hypothèse d'une donnée f assez régulière, θ est le gradient d'une fonction Lipschitzienne de rapport 1 et μ est de la forme $a(x)\,dx$. Pour généraliser ce résultat à une donnée quelconque f, nous introduisons les notions d'espace de Sobolev H^1_μ et de dérivée tangentielle D_μ associés à une mesure μ (cf. [3]). Si $\mathcal{E}(\mu)$ est fini, alors f appartient au dual de H^1_μ et on peut définir une solution relaxée u du problème (2), vérifiant $\mathcal{E}(\mu) = \frac{1}{2}\int |D_\mu u|^2\,d\mu - < f, u >$.

Revenant alors au problème (7), on démontre que toute solution ϕ du problème (6) vérifie $\theta = \mathcal{D}_\mu u$, μ p.p.. Ceci établit (Théorème 1) l'existence d'une solution (ϕ,μ) pour une version relaxée de l'équation de Monge-Kantorovich (9). En normalisant cette mesure μ de façon à satisfaire la condition de masse, on en déduit (Théorème 2) l'existence d'une solution μ_0 pour le problème (3) à laquelle correspond une distribution de température u_0 dans H^1_μ.

Dans la dernière partie de cette note nous donnons deux exemples où la densité f est uniformément répartie le long d'une ligne Γ équilibrée par une ou deux sources ponctuelles. Dans la figure $\Gamma = (A,B,C,C',B',A')$, les sources ponctuelles sont placées en O et O'. La mesure optimale est constituée de termes de dimensions différentes.

Les démonstrations détaillées ainsi que l'extension au cas de fonctions vectorielles, essentielle pour traiter le problème dans le cadre de l'élasticité, apparaîtront dans des papiers ultérieurs.

1. INTRODUCTION - In the last two decades there has been a dramatic improvement in the understanding of shape optimization problems from a mathematical point of view, mainly thanks to the powerful theories of homogenization and Γ-convergence which have been developed meanwhile. What became clear soon was that in a wide number of situations the optimal shape does not exists, and the existence of an optimal solution must be intended only in a *relaxed sense*. In problems of optimal mixtures of two homogeneous and isotropic materials the relaxed solutions have been completely studied, and identified as symmetric matrices with bounded and measurable coefficients, whose eigenvalues satisfy some suitable *bounds*. Moreover, in almost all cases which have been considered, this optimal relaxed matrix is not isotropic (i.e. of the form $a(x)I$, being I the identity matrix), and this was interpreted by saying that a minimizing sequence is composed by *laminates*.

However, in the mixtures of two materials, when the percentage of the strong one tends to zero, the phenomenon of appearance of low dimensional network structures was already remarked (see Allaire-Kohn [1]). Moreover, because of capacitary arguments, concentrated loads are forbidden in the classical framework, but they become admissible as soon as we allow the conductivity coefficient to be singular, or more generally a measure. This pushed us to consider a general form of shape optimization problems, where for a load we take a given measure, and the density (the unknown of the problem) is searched among all nonnegative measures with a given mass. The main result is that we obtain the existence of an optimal measure for the total energy cost functional; moreover, the optimal measure may present the interesting feature to be composed by terms of different dimensions. The particular case of L^2 loads and densities bounded between two given positive constants was already studied by Cea and Malanowski [4].

The key tool to achieve the existence result is a preliminary study on the existence of solutions for a generalized version of the Monge-Kantorovich partial differential equation describing the mass transfer problem. We have been illuminated on the subject by the excellent paper recently written by Evans and Gangbo [5].

For the sake of clarity we decided to present here the matter by listing the various tools we use: the shape optimization result will come out at the end as a consequence of a suitable application of them. The detailed proofs as well as the extension to the case of vector valued functions, essential to treat problems in elasticity, will appear in forthcoming papers.

2. THE SHAPE OPTIMIZATION PROBLEM - Here and in the following f indicates a given signed measure on $\mathbf{R}^n$ with finite total variation and zero average; in a stationary heat conduction model it represents the heat sources density which may possibly concentrate on sets of dimension lower than n. For every nonnegative measure μ on $\mathbf{R}^n$ which represents the conductivity density, we consider the total energy associated to a given smooth distribution temperature u

$$E(\mu,u) = \frac{1}{2}\int |Du|^2\,d\mu - \langle f,u\rangle \qquad (u\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)) \tag{1}$$

and its infimum

$$\mathcal{E}(\mu) = \inf\{E(\mu,u)\ :\ u\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)\}. \tag{2}$$

It must be noticed that we may have $\mathcal{E}(\mu) = -\infty$ for some measures μ; this is for instance the case when f concentrates on sets of dimension smaller that $n-1$ and μ is the Lebesgue measure. However these "singular" measures μ are ruled out from our discussion because we look for maximization of the energy $\mathcal{E}(\mu)$. Indeed, we consider the optimization problem

$$\max\{\mathcal{E}(\mu)\ :\ \mu \text{ nonnegative measure}, \int d\mu = m\}. \tag{3}$$

By a standard duality argument, the following dual problem associated to (2) has a solution:

$$\mathcal{E}(\mu) = \max\{-\frac{1}{2}\int |\sigma|^2\, d\mu\ :\ \int d\mu = m,\ \sigma \in L^2_\mu(\mathbf{R}^n),\ -\operatorname{div}(\sigma\mu) = f\}\ . \tag{4}$$

By Cauchy-Schwartz inequality, and taking into account that $\int d\mu = m$ and $-\operatorname{div}(\sigma\mu) = f$, we may obtain an upper bound for problem (4). Indeed, by the inequality

$$\int |\sigma|^2\, d\mu \geq \frac{1}{m}\Big(\int \sigma\, D\phi\, d\mu\Big)^2 = \frac{1}{m}|\langle f, \phi\rangle|^2 \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n),\ |D\phi| \leq 1 \tag{5}$$

we obtain that the maximum in (4) is lower than $-\frac{1}{2m}|I(f)|^2$ where

$$I(f) = \min\{-\langle f, \phi\rangle\ :\ \phi \in \operatorname{Lip}_1(\mathbf{R}^n)\}. \tag{6}$$

Here $\operatorname{Lip}_1(\mathbf{R}^n)$ is the class of all Lipschitz functions on $\mathbf{R}^n$ with constant 1. We shall prove that the lower bound above is optimal. Again by standard convex duality arguments, the dual formulation of problem (6) has a solution and reads as

$$\max\{-\int d|\nu|\ :\ \nu \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^n),\ -\operatorname{div}\nu = f\}. \tag{7}$$

Problem (6) is known in the literature as the Monge-Kantorovich mass transfer problem; we refer to [5] for a wide presentation of the subject and for a proof that under some additional regularity assumptions on f the minimum in (6) is attained on a Lipschitz function u which satisfies

$$-\operatorname{div}(a(x)Du) = f, \qquad |Du| = 1 \text{ a.e. on } \{a(x) > 0\}$$

for a suitable bounded density function $a(x)$.

3. MEASURE DEPENDENT SOBOLEV SPACES AND RELATED VARIATIONAL CALCULUS - We follow here the construction already introduced in Bouchitté, Buttazzo, Seppecher [3], with some slight adaptations. For a given bounded nonnegative measure μ on $\mathbf{R}^n$ we set

$$X_\mu = \{\psi \in L^2_\mu(\mathbf{R}^n)\ :\ \operatorname{div}(\psi\mu) \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^n)\}$$

and we denote for μ-a.e. x by $T_\mu(x)$ the tangent space to μ at x, defined as

$$T_\mu(x) = \mu\text{-ess}\bigcup\{\psi(x)\ :\ \psi \in X_\mu\}.$$

The orthogonal projection on $T_\mu(x)$ of gradients defines an operator on smooth functions which is closable on $L^2_\mu(\mathbf{R}^n)$. We denote by D_μ its closure, and we define the Sobolev space H^1_μ as the domain of D_μ. By construction, any field in X_μ is tangent to μ and then $\operatorname{div}(\psi\mu)$ belongs to the dual space H^{-1}_μ, so that the integration by parts formula becomes

$$\int D_\mu\phi\, \psi\, d\mu = -\langle \operatorname{div}(\psi\mu), \phi\rangle \tag{8}$$

where the last brackets are in the (H^{-1}_μ, H^1_μ) duality. Note that f must belong to H^{-1}_μ for the infimum $\mathcal{E}(\mu)$ of problem (2) to be finite. In that case problem (2) admits a relaxed solution $u \in H^1_\mu$ which satisfies $\mathcal{E}(\mu) = \frac{1}{2}\int |D_\mu u|^2 \, d\mu - \langle f, u\rangle$.

4. THE MAIN RESULT - We are now in a position to give an existence result for the relaxed version of Monge-Kantorovich equation

$$-\operatorname{div}(\mu D_\mu w) = f, \qquad |D_\mu w| = 1 \ \mu\text{-a.e.}, \qquad w \in \mathrm{Lip}_1(\mathbf{R}^n) \tag{9}$$

Theorem 1. *For every measure f on $\mathbf{R}^n$ with finite total variation and zero average there exist a bounded nonnegative measure μ and a function $w \in \mathrm{Lip}_1(\mathbf{R}^n)$ satisfying the Monge-Kantorovich equation (7).*

The proof can be obtained by writing the extremality relation between the infimum of (6) and the maximum of (7), which gives

$$-\int d\mu = I(f) = -\langle f, w\rangle \tag{10}$$

where $\mu = |\nu|$ and $w \in \mathrm{Lip}_1(\mathbf{R}^n)$ is a solution of

$$\min\{-\langle f, w\rangle \ : \ \phi \in \mathrm{Lip}_1(\mathbf{R}^n)\}.$$

Writing $\nu = \theta\mu$ with μ bounded nonnegative measure on $\mathbf{R}^n$ and $|\theta| = 1$ μ-a.e., and using the relation $-\operatorname{div}\nu = f$, we obtain that $\theta \in X_\mu$ and $f \in H^{-1}_\mu$. Therefore, the integration by parts formula (8) holds and by (10)

$$\int \theta \cdot D_\mu w \, d\mu \ = \ \langle f, w\rangle \ = \ \int d\mu \ .$$

As $|D_\mu w| \le 1$, μ a.e., we get $\theta = D_\mu w$, that is the Monge-Kantorovich equation (7).

The result above enables us to solve the shape optimization problem (3). Indeed, let μ and w be solutions of (7), and set

$$\mu_0 = \frac{m}{|I(f)|}\mu, \qquad u_0 = \frac{|I(f)|}{m} w;$$

then $\sigma_0 = D_{\mu_0} u_0$ satisfies the equilibrium equation $-\operatorname{div}(\sigma_0\mu_0) = f$ and so

$$\mathcal{E}(\mu_0) \ge -\frac{1}{2}\int |\sigma_0|^2 \, d\mu = -\frac{1}{2}\langle u_0, f\rangle = -\frac{1}{2m}|I(f)|^2$$

which proves the optimality of μ_0. Then u_0 represents the optimal distribution of temperature associated with μ_0. Summarizing, we have proved the following result.

Theorem 2. *The shape optimization problem (3) has a solution μ_0. Moreover, a measure μ solves (3) if and only if the rescaled measure $\mu|I(f)|/m$ solves the Monge-Kantorovich equation (7).*

5. SOME EXAMPLES - Let us consider a continuous plane curve Γ in polar coordinates, $r = h(\theta)$, with length L, and let f be the heat sources density $\mathcal{H}^1 \llcorner \Gamma - L\delta_0$. Then, an easy computation gives that the optimal pair (μ_0, u_0) is

$$\mu_0 = \frac{c}{r}\sqrt{h^2(\theta) + |h'(\theta)|^2}\,\mathcal{H}^2 \llcorner \Sigma\ , \qquad u_0 = \frac{r}{c}$$

for a suitable constant $c > 0$, where Σ is the set $0 \le r \le h(\theta)$. In case h is a BV function presenting a jump $[h^-, h^+]$ at some θ_0, then the additional concentration $c(h^+ - r \vee h^-)\mathcal{H}^1$ occurs on the corresponding ray, which shows that optimal measures may have terms of lower dimension.

In Figure below we display the case of the optimal density μ_0 for another plane curve $\Gamma = (A, B, C, C', B', A')$ of length 1, with f given by $2\mathcal{H}^1 \llcorner \Gamma - \delta_0 - \delta_{0'}$.

Acknowledgements. The first and second authors gratefully acknowledge the kind hospitality of the Departments of Mathematics of Universities of Pisa and Toulon respectively. The work of the second author was supported by the project "Phase Transition and Surface Tension", contract CHRX-CT94-0608 of the program HCM of the Commission of the European Communities.

References

1. G. Allaire, R. V. Kohn: *Optimal design for minimum weight and compliance in plane stress using extremal microstructures.* Europ. J. Mech. A/Solids, **12** (6) (1993), p. 839–878.
2. M. Bendsoe: *Optimal shape design as a material distribution problem.* Struct. Optim., **1** (1989), p. 193–202.
3. G. Bouchitté, G. Buttazzo, P. Seppecher: *Energies with respect to a measure and applications to low dimensional structures.* Calc. Var., **5** (1997), p. 37–54.
4. J. Cea, K. Malanowski: *An example of a max-min problem in partial differential equations.* SIAM J. Control, **8** (1970), p. 305–316.
5. L. C. Evans, W. Gangbo: *Differential equations methods for the Monge-Kantorovich mass transfer problem.*, preprint, 1996
6. R. V. Kohn, G. Strang: *Optimal design and relaxation of variational problems, I,II,III.* Comm. Pure Appl. Math., **39** (1986), p. 113-137, p. 139-182, p. 353–377.
7. F. Murat, L. Tartar: *Optimality conditions and homogenization.* Proceedings of "Nonlinear variational problems", Isola d'Elba 1983, Res. Notes in Math. **127**, Pitman, London, (1985), p. 1–8.