C.R. Acad. Sci. Paris, proposition
Mécanique des milieux continus/*Continuum Mechanics*

Un résultat d'homogénéisation pour un matériau élastique renforcé périodiquement par des fibres élastiques de très grande rigidité.

Catherine Pideri et Pierre Seppecher

Laboratoire d'Analyse Non Linéaire Appliquée,
Université de Toulon et du Var, 83957 La Garde CEDEX, France.

Résumé- Nous étudions l'homogénéisation d'un milieu élastique renforcé périodiquement par des fibres de beaucoup plus grande rigidité que la matrice. Nous supposons que les fibres sont parallèles, cylindriques, de section circulaire, et de rayon beaucoup plus petit que la distance de séparation des fibres. Ces hypothèses diffèrent de celles faites dans le cadre classique de la théorie de l'homogénéisation et conduisent à un résultat très différent: nous montrons que, lorsque le rayon des fibres tend vers zero et que les coefficients de Lamé du matériau les constituant tendent vers l'infini avec des vitesses adaptées, le milieu homogéneisé se comporte comme un milieu de second gradient, c'est à dire un milieu dont l'énergie dépend du second gradient du déplacement.

An homogeneization result for elastic material reinforced periodically with hight rigidity elastic fibers.

Abstract- *We study the homogeneized properties of a linear elastic medium reinforced periodically with parallel fibers made of a much stronger linear elastic medium. We assume that the fibers are cylinders with circular section whose radius is much smaller than the period of the medium. These assumptions differ from the classical ones in homogeneization theory and our result is quite new: we show that, when the radius of the fibers tends to zero and when the Lamé coefficients in the fibers tend to infinity with appropriate scaling, the effective material is a second gradient material, i.e. a material whose energy depends on the second gradient of the displacement.*

Abridged english version

In the framework of linear elasticity, we study the behaviour of a composite material made up of an elastic matrix reinforced with elastic fibers. We assume that the fibers are parallel cylinders arranged along a square lattice. By convention, we choose the caracteristic length of the domain as the length unit. As the period of the lattice (denoted ε) is much smaller than 1, we study the behaviour of the composite material in the limit ε tends to zero, looking for the "effective" properties of the material.

When the elasticity coefficients in the fibers are of the same order of magnitude as the elasticity coefficients λ_0 and μ_0 of the matrix, the problem is a classic one in homogeneization theory. It is well known [1] that the effective material is a linear elastic material whose coefficients can be explicited in terms of the geometry and of the elasticity coefficients of the matrix and the fibers.

In this paper we study the limit case when the elasticity coefficients in the fibers (which we denote λ_ε and μ_ε) tend to infinity and when the radius of the fibers (which we denote r_ε)

tends to zero faster than ε. Such a situation has already be studied by D. Caillerie [2] who, setting $\lambda_\varepsilon = \eta^{-\theta}$, $\mu_\varepsilon = \eta^{-\theta}$, $r_\varepsilon = \eta\,\varepsilon$, considered the limit $(\varepsilon,\eta) \to (0,0)$ in two cases: ($\eta \to 0$ then $\varepsilon \to 0$) and ($\varepsilon \to 0$ then $\eta \to 0$). He found that both cases lead to an elastic material but that the homogenized elasticity coefficients depend on the limit procedure: the two limits $\varepsilon \to 0$ and $\eta \to 0$ do not commute.

Here we consider another limit procedure: we let ε, $\dfrac{r_\varepsilon}{\varepsilon}$, ${\mu_\varepsilon}^{-1}$ and λ_ε^{-1} tend to zero together, assuming the particular scaling (1). We are lead to a very different limit behaviour. Our main result (see (5) (6)) shows that the effective material is no more a classic elastic one but a second gradient one: the limit energy E_0 (see (4)) depends on the second gradient of the displacement.

Our result is interesting from both mathematical and mecanical point of view: it provides a simple example of second gradient material. This is important because there are few examples of such materials and because their behaviour is not yet well understood: their thermodynamics is still controversial [3], the Cauchy theorem defining the Cauchy stress tensor cannot be applied [4], the boundary conditions are very unusual [5], not intuitive and cannot be obtained without the help of the virtual power principle [6]. Our result gives a “microscopic” interpretation of these special features.

From the mathematical point of view, we emphasize that, going to the limit, the differential order of the energy changes (and so does the system of partial differential equations associated with equilibrium). Such a phenomenon seemed to be connected with a change of dimension (like in rods or plates theories). Our result, unusual in homogenization theory, shows that this is not necessary.

Our study combine the modelling of rods displacements and the multiscale technics for homogenization. Indeed, we show that a rod-like displacement is a good approximation for the actual displacement field in each fiber. On the other hand, as we are especially interested by the behaviour of minimizing sequences at scale r_ε inside the fibers, we need a multiscale notion of convergence. However, we do not expect a periodicity with period r_ε: the classical notions of multiscale convergence are not convenient. We develop an adapted notion of double scale convergence (see definition (8)) which describes the asymptotic behaviour of a sequence (u_ε) on the fibers, i.e. on a set of scale r_ε but of periodicity ε.

The proof of the lowerbound (5) is obtained using this notion of double scale convergence: we prove that, for every sequence u_ε with bounded energy, the limits defined in Lemma 2 verify the relation (11) which makes the connexion between the asymptotic behaviour of $e(u_\varepsilon)$ and the second gradient of the limit u of u_ε. The proof of the upperbound (6) is obtained in a classic way: we construct explicitely an approximating sequence, using a “rod-like motion” inside the fibers (see (15-16)).

---

1. INTRODUCTION - Dans le cadre de l’élasticité linéaire nous étudions le comportement d’un matériau composite formé d’une matrice élastique renforcé par des fibres élastiques plus rigides. Nous supposons que ces fibres sont des cylindres de section circulaire, parallèles et placées selon un réseau de maille carrée et de période ε. Pour simplifier, nous étudions un cube Ω (de coté 1 par convention), les fibres étant orthogonales à l’une des faces. Nous supposons que la période ε est beaucoup plus petite que 1 et nous étudions donc le comportement limite du matériau lorsque ε tend vers zéro, c’est à dire que nous recherchons ses propriétés “effectives”.

Quand les coefficients de Lamé dans les fibres sont du même ordre de grandeur que ceux de la matrice (notés (λ_0, μ_0)), ce problème est classique en théorie de l'homogénéisation: on sait que le comportement effectif est encore élastique.

Dans cet article nous étudions le cas où les coefficients d'élasticité dans les fibres (notés λ_ε et μ_ε) tendent vers l'infini et le rayon des fibres (notés r_ε) tend vers zéro plus rapidement que ε. Une telle situation a déja été étudiée par D. Caillerie [2] qui, posant $\lambda_\varepsilon = \eta^{-\theta}$, $\mu_\varepsilon = \eta^{-\theta}$, $r_\varepsilon = \eta\,\varepsilon$, a considéré la limite $(\varepsilon, \eta) \to (0,0)$ dans les deux cas particuliers: $(\eta \to 0$ puis $\varepsilon \to 0)$ et $(\varepsilon \to 0$ puis $\eta \to 0)$. Il a obtenu dans les deux cas un comportement effectif élastique.

Ici nous considérons un cas où η et ε tendent vers zéro simultanément: nous supposons

$$(1) \qquad \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} = 0, \quad \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \varepsilon^2 \log(r_\varepsilon) = 0, \quad \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{\mu_\varepsilon r_\varepsilon^4}{\varepsilon^2} = \mu_1 > 0, \quad \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{\lambda_\varepsilon}{\mu_\varepsilon} = \ell.$$

Nous obtenons alors un nouveau comportement effectif dans lequel la densité d'énergie dépend du second gradient du déplacement.

L'exemple simple de milieu de second gradient qui est ainsi construit doit permettre d'interpréter les propriétés specifiques de tels milieux: existence d'un flux supplémentaire d'énergie ("interstitial working") [3], representation des efforts internes [6], conditions aux limites [5], ... Notre résultat doit être comparé aux théories des plaques minces ou des poutres pour lesquelles on assiste aussi à un changement d'ordre differentiel de l'énergie (et donc du sytème d'équations aux dérivées partielles décrivant l'équilibre) par passage à la limite. Dans notre cas, ce phénomène n'est pas lié à un changement de dimension (3D-2D ou 3D-1D) mais au processus d'homogenéisation lui-même.

2. ENONCE DU RESULTAT- Nous utilisons les notations suivantes: u étant un champ de déplacements, $e(u)$ désigne la partie symétrique de son gradient et $\mathrm{Tr}(e(u))$ la trace de $e(u)$. L'ensemble des tenseurs d'ordre 2 symétriques est noté $\mathcal{M}$. Nous utilisons la convention de sommation des indices répétés, les indices latins variant 1 à 3, les indices grecs variant de 1 à 2. Pour tout domaine D de volume $|D|$, pour tout $u \in \mathrm{L}^1(D)$, on note $⨍_D u dx$ la moyenne de u sur D: $⨍_D u dx := |D|^{-1} \int_D u dx$.

Pour décrire la structure périodique du matériau composite on définit l'application de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^2$

$$(2) \qquad y_\varepsilon : (x_1, x_2, x_3) \longmapsto r_\varepsilon^{-1}[(x_1, x_2) - p_\varepsilon(x_1, x_2)]$$

où p_ε désigne la projection qui, à tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, associe les coordonnées (dans $\mathbb{R}^2$) de l'axe de la fibre la plus proche. La réunion des fibres se définit alors par $F_\varepsilon := \{x \in \Omega : |y_\varepsilon(x)| < 1\}$ et la matrice par $M_\varepsilon := \Omega \setminus F_\varepsilon$.

Nous supposons que le cube Ω est fixé par sa face $\mathcal{B} := \{x_3 = 0\}$ et que les fibres et la matrice sont parfaitement collées: les déplacements sont nuls sur $\mathcal{B}$ et continus aux interfaces fibre-matrice. Ainsi, en définissant $E^m(D, u) := \int_D [\frac{1}{2}\lambda_0 (\mathrm{Tr}(e(u)))^2 + \mu_0 e(u)^2]\, dx$ et $E_\varepsilon^f(D, u) := \int_D [\frac{1}{2}\lambda_\varepsilon (\mathrm{Tr}(e(u)))^2 + \mu_\varepsilon e(u)^2]\, dx$, l'énergie totale du matériau s'écrit:

$$(3) \qquad E_\varepsilon(u) := E^m(M_\varepsilon, u) + E_\varepsilon^f(F_\varepsilon, u)$$

si $u \in \mathrm{H}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ et $u = 0$ sur $\mathcal{B}$, $E_\varepsilon(u) := +\infty$ sinon. Posons maintenant $k := \dfrac{\pi}{8} \dfrac{3\ell + 2}{\ell + 1} \mu_1$ et

$$(4) \qquad E_0(u) := E^m(\Omega, u) + k \int_\Omega \left[(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2})^2 + (\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2})^2 \right] \, dx$$

si $u \in \mathrm{H}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$, $u_3 = 0$ p.p. dans Ω, $u = \dfrac{\partial u}{\partial x_3} = 0$ p.p. sur $\mathcal{B}$, $E_0(u) := +\infty$ sinon. Nous montrons que E_ε Γ-converge vers E_0 dans $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$, plus précisément:

Théorème:
i) Toute suite d'énergie bornée est fortement relativement compacte dans $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$.
ii) Toute suite (u_ε) *d'énergie bornée, convergeant vers* u *dans* $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$*, vérifie*

$$\liminf_{\varepsilon \longrightarrow 0} E_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq E_0(u). \tag{5}$$

iii) Inversement, pour tout u *dans* $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$*, il existe une suite* (u_ε) *telle que*

$$u_\varepsilon \longrightarrow u \text{ dans } \mathrm{L}^2(\Omega, \mathbb{R}^3), \quad \limsup_{\varepsilon \longrightarrow 0} E_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq E_0(u). \tag{6}$$

Ce résultat permet d'écrire les équations d'équilibre du matériau homogénéisé lorsqu'il est soumis à une densité volumique de force f. Ce sont les équations d'Euler issues de la minimisation de $E_0(u) - \int f u \, dx$. Notant $\sigma_0 := \lambda_0 \mathrm{Tr}(e(u)) \mathbb{1} + 2\mu_0 e(u)$ et n la normale extérieure à la frontière de Ω, les conditions aux limites s'écrivent $n.\sigma_0 = 0$ sur les faces latérales, $u_\alpha = \dfrac{\partial u_\alpha}{\partial x_3} = 0$ sur $\mathcal{B}$, $(n.\sigma_0)_\alpha - 2k \dfrac{\partial^3 u_\alpha}{\partial x_3^3} = \dfrac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_2^2} = 0$ sur la surface supérieure. Les équations volumiques d'équilibre s'écrivent:

$$(\mathrm{div}(\sigma_0))_\alpha - 2k \frac{\partial^4 u_\alpha}{\partial x_3^4} + f_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2 \quad ; \quad u_3 = 0. \tag{7}$$

3. PREUVE DU THEOREME - Si $(E_\varepsilon(u_\varepsilon))$ est bornée alors $(\int_\Omega e(u_\varepsilon)^2 \, dx)$ l'est aussi: grâce à l'inégalité de Korn, nous savons que la suite (u_ε) est bornée dans $\mathrm{H}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ donc fortement relativement compacte dans $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$. La preuve de (ii) est moins triviale. Nous associons à la suite d'ensembles (F_ε) la notion de double convergence suivante: notons D_1 le disque unité de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{D} := C_c^\infty(\Omega \times D_1, \mathbb{R})$,

Définition: *nous dirons qu'une suite* (u_ε) *dans* $\mathrm{L}^2(\Omega)$ *converge à double échelle vers* $u \in \mathrm{L}^2(\Omega \times D_1)$ *et nous écrirons* $u_\varepsilon \rightharpoonup\!\!\rightharpoonup u$ *si et seulement si*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \fint_{F_\varepsilon} u_\varepsilon(x) \, \varphi(x, y_\varepsilon(x)) \, dx \to \fint_\Omega \fint_{D_1} u(x, y) \, \varphi(x, y) \, dy \, dx \ . \tag{8}$$

Lemme 1 *Pour tout* $\Phi \in \mathcal{D}$*, pour toute suite* (u_ε) *vérifiant* $(u_\varepsilon) \rightharpoonup\!\!\rightharpoonup u$*, nous avons*

$$\Phi(., y_\varepsilon(.)) \rightharpoonup\!\!\rightharpoonup \Phi \qquad \text{et} \qquad \Phi(., y_\varepsilon(.)) \, u_\varepsilon(.) \rightharpoonup\!\!\rightharpoonup \Phi \, u \ .$$

Lemme 2 *Pour tout* $(u_\varepsilon) \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ *tel que* $(\fint_{F_\varepsilon} u_\varepsilon^2(x) \, dx)$ *soit bornée, il existe* $v \in \mathrm{L}^2(\Omega \times D_1, \mathbb{R}^3)$ *tel que, quitte à extraire une sous-suite,* $u_\varepsilon \rightharpoonup\!\!\rightharpoonup v$*. De plus on a*

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \fint_{F_\varepsilon} u_\varepsilon^2(x) \, dx \geq \fint_\Omega \fint_{D_1} (v(x, y))^2 \, dy \, dx \ . \tag{9}$$

Lemme 3 *Pour toute suite* (u_ε) *bornée de* $\mathrm{H}^1(\Omega, \mathrm{I\!R}^3)$, $(\fint_{F_\varepsilon} u_\varepsilon^2 dx)$ *est bornée. De plus, si* $u_\varepsilon \to u$ *dans* $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathrm{I\!R}^3)$, *alors* $\fint_{F_\varepsilon} (u_\varepsilon - u)^2 dx \to 0$.

Notons que la démonstration du lemme 3 repose sur l'hypothèse $\lim \varepsilon^2 \log(r_\varepsilon) = 0$.

Les lemmes 1, 2, 3 ainsi que la condition aux limites $u_\varepsilon = 0$ sur $\mathcal{B}$ permettent ensuite de montrer:

Lemme 4 *Pour toute suite* (u_ε) *d'énergie bornée, il existe* $u \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathrm{I\!R}^3)$, $v \in \mathrm{L}^2(\Omega \times D_1, \mathrm{I\!R}^3)$, $w \in \mathrm{L}^2(\Omega \times D_1, \mathrm{I\!R})$ *et* $\mathcal{X} \in \mathrm{L}^2(\Omega \times D_1, \mathcal{M})$ *tels que, quitte à extraire une sous-suite,*

$$u_\varepsilon \longrightarrow u \ , \qquad u_\varepsilon \rightharpoonup\!\!\!\rightharpoonup v \ , \qquad \frac{u_{\varepsilon 3}}{r_\varepsilon} \rightharpoonup\!\!\!\rightharpoonup w \ , \qquad \frac{e(u_\varepsilon)}{r_\varepsilon} \rightharpoonup\!\!\!\rightharpoonup \mathcal{X} \ . \tag{10}$$

Lemme 5 *Les limites définies par le lemme 4 vérifient:* $u \in \mathrm{H}^1(\Omega, \mathrm{I\!R}^3)$, $\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathrm{I\!R})$, $\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathrm{I\!R})$, $u_3(x) = 0$ *p.p. dans* Ω. *De plus il existe* $q \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathrm{I\!R})$ *tel que*

$$\mathcal{X}_{33}(x,y) = q(x) - \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_3^2}(x)\, y_\alpha \quad p.p.\ dans\ \Omega \times D_1 \ . \tag{11}$$

Preuve du lemme 5: Remarquons que $u(x) = \fint_{D_1} v(x,y)\, dy$ p.p. dans Ω. L'existence de w implique $v_3 = 0$, nous avons donc $u_3 = 0$. Considérons un champ de matrices $\varphi \in C_c^\infty(\Omega \times D_1, \mathcal{M})$. En utilisant la définition de $\mathcal{X}$ et le théorème de la divergence, nous obtenons

$$\begin{aligned} \fint_\Omega \fint_{D_1} \mathcal{X}_{ij}(x,y)\, \varphi_{ij}(x,y)\, dy\, dx = -\lim_{\varepsilon \to 0} \fint_{F_\varepsilon} \Big\{ \frac{1}{r_\varepsilon^2} u_{\varepsilon\,\beta}(x) \frac{\partial \varphi_{\beta\alpha}}{\partial y_\alpha}(x, y_\varepsilon(x)) \\ + \frac{1}{r_\varepsilon} \Big(u_{\varepsilon\,\beta}(x) \frac{\partial \varphi_{\beta j}}{\partial x_j}(x, y_\varepsilon(x)) + \frac{u_{\varepsilon\,3}(x)}{r_\varepsilon} \frac{\partial \varphi_{3\alpha}}{\partial y_\alpha}(x, y_\varepsilon(x)) \Big) + \frac{u_{\varepsilon\,3}(x)}{r_\varepsilon} \frac{\partial \varphi_{3j}}{\partial x_j}(x, y_\varepsilon(x)) \Big\}\, dx \ . \end{aligned} \tag{12}$$

En passant à la limite dans cette équation aprè s l'avoir multipliée par r_ε^2, r_ε puis 1, on obtient successivement les relations liant v_α, w et $\mathcal{X}$ à u.

Preuve de la proposition (ii) du théorème: l'argument essentiel consiste à obtenir, grâce au lemme 2 et à la relation (11), l'estimation suivante pour l'énergie:

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} E_\varepsilon^f(F_\varepsilon, u_\varepsilon) \geq 8k \fint_\Omega \fint_{D_1} \mathcal{X}_{33}^2(x,y) dy\, dx \geq k \fint_\Omega \left[(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2})^2 + (\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2})^2 \right] dx \ . \tag{13}$$

Notons que la condition aux limites $\partial u_\alpha / \partial x_3 = 0$ sur $\mathcal{B}$ est obtenue en prolongeant u_ε par 0 pour $x_3 < 0$ et en appliquant l'estimation précédente à ce prolongement. □

Preuve de la proposition (iii) du théorème: cette preuve est obtenue par la construction explicite d'une suite approximante. On se limite d'abord, par un argument de densité, à une fonction u régulière et vérifiant, outre les conditions imposées par $E_0(u) < +\infty$, la condition

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0$ p.p. sur $\mathcal{B}$. Puis sur chaque période p, on définit le "déplacement global" de la fibre contenue dans la période comme la moyenne de u sur les sections de la fibre:

$$v_\varepsilon^p(x_3) := \fint_{D_1} u(x_1^p + r_\varepsilon\, y_1, x_2^p + r_\varepsilon\, y_2, x_3)\; dy_1\, dy_2 \ , \tag{14}$$

(x_1^p, x_2^p) désignant les coordonnées de l'axe de la fibre. Puis, notant $y^\perp$ le vecteur $(y_2, -y_1$, on définit le "déplacement de poutre":

$$\begin{cases} w_{\varepsilon\alpha}^p(x_3, y_1, y_2) := v_{\varepsilon\alpha}^p(x_3) + r_\varepsilon^2\, \dfrac{\ell}{4(\ell+1)}\, \dfrac{\partial^2 v_{\varepsilon\beta}^p}{\partial x_3^2}(x_3)\, \left(y_\beta y_\alpha - y_\beta^\perp y_\alpha^\perp\right) \\ w_{\varepsilon 3}^p(x_3, y_1, y_2) := -\, r_\varepsilon\, \dfrac{\partial v_{\varepsilon\alpha}^p}{\partial x_3}\, y_\alpha \end{cases} \tag{15}$$

On choisit alors une suite (δ_ε) vérifiant $1 << \delta_\varepsilon << r_\varepsilon^{-1}\, \varepsilon$ et on pose $\gamma(r) := \log(r)/\log(\delta_\varepsilon)$. Il est alors facile de constater que les propriétés (6) sont véridfiées par la suite approximante définie dans chaque période p par

$$\begin{cases} u_\varepsilon(x) := w_\varepsilon^p(x_3, y_\varepsilon(x)) & \text{si } y_\varepsilon(x) < 1 \\ u_\varepsilon(x) := (1 - \gamma(|y_\varepsilon(x)|))\, w_\varepsilon^p(x_3, \dfrac{y_\varepsilon(x)}{|y_\varepsilon(x)|}) + \gamma(|y_\varepsilon(x)|)\, u(x) & \text{si } 1 < y_\varepsilon(x) < \delta_\varepsilon \\ u_\varepsilon(x) := u(x) & \text{si } y_\varepsilon(x) > \delta_\varepsilon \end{cases} \tag{16}$$

Remerciements: Cette étude a été réalisée à la suite de discussions approfondies avec G. Bouchitté et M. Bellieud qui ont étudié le problème de la diffusion dans une géométrie analogue [7].

Références

1. E. Sanchez-Palencia,1980. *Non Homogeneous Media and Vibration Theory*, Springer-Verlag.
2. D. Cailllerie, 1981. Homogénéistation d'un corps élastique renforcé par des fibres minces de grande rigidité et réparties périodiquement, C.R.Acad.Sc.Paris, Série II, t.292, p.477-480.
3. J.E. Dunn et J. Serrin, 1985. On the thermodynamics of interstitial working, Arch. Rational Mech. Anal., 88, N.2, p. 95-133.
4. F. dell'Isola et P. Seppecher, 1995. The relationship between edge contact force, double forces and interstitial working allowed by the principle of virtual power, C.R.Acad.Sci., t. 321, série IIb, p. 303-308.
5. P. Seppecher, 1989. Etudes des conditions aux limites en théorie du second gradient: cas de la capillarité, C.R.Acad.Sc.Paris, Série II, t.309, p.497-502.
6. P. Germain, 1973. La méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus, Journal de Mécanique, Vol. 12, N. 2, p. 235-274.
7. M. Bellieu et G. Bouchitté, 1996. Homogenization of elliptic problems in a fiber reinforced structure. Non local effects, soumis à Annali della Scuola Normale Superioire di Pisa, 1996